Chapitre 2

Racines, interpolation

2.1 Racines

2.1.1 Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers

Proposition 2.1 *Soit $A = a_nX^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers avec $a_na_0 \neq 0$. Si p/q est une racine rationnelle de A (avec p et q entiers premiers entre eux), alors p divise a_0 et q divise a_n ; de plus, le quotient de la division de A par $qX - p$ est à coefficients entiers.*

Exercice 2.1

Si A est un polynôme unitaire à coefficients entiers, toute racine rationnelle de A est un entier.

Exercice 2.2

Trouver toutes les racines rationnelles des polynômes suivants :

1. $5X^3 - 4X^2 + 3X + 2$
2. $3X^4 + 5X^3 + 2X^2 - 6X - 4$
3. $X^4 - X^3 - 32X^2 - 62X - 56$

Exercice 2.3

Si A est un polynôme à coefficients entiers et p/q une racine rationnelle de A, avec p et q premiers entre eux, alors, pour tout entier m, $qm - p$ divise $A(m)$.

Exercice 2.4

Soit $A = 6X^3 + 13X^2 - 22X - 8$. Calculez $A(-2), A(-1), A(1), A(2)$. Trouvez toutes les racines rationnelles de A (vous pouvez utiliser l'exercice précédent).

2.1.2 Bornes sur les racines

Proposition 2.2 *Soit $A = a_nX^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ avec $a_n \neq 0$. Alors toute racine $z \in \mathbb{C}$ de A vérifie*

$$|z| \leq \max(1, \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|a_n|}) .$$

Exercice 2.5

Montrer que si z est racine de $A = a_nX^n + \cdots + a_0$ (avec $a_na_0 \neq 0$) si et seulement si $1/z$ est racine de $a_n + a_{n-1}X + \cdots + a_0X^n$. En déduire une borne inférieure > 0 sur le module des racines de A.

Exercice 2.6

Soit $A = a_nX^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$

1. On suppose $0 < a_n \leq a_{n-1} \leq \ldots \leq a_1 \leq a_0$. Montrer que toute racine $z \in \mathbb{C}$ de A vérifie $|z| \geq 1$. (*On pourra raisonner par l'absurde et considérer* $(1-z)A(z)$.)
2. On suppose $a_n \geq a_{n-1} \geq \ldots \geq a_1 \geq a_0 > 0$. Montrer que toute racine $z \in \mathbb{C}$ de A vérifie $|z| \leq 1$.

Soit $B = b_nX^n + \cdots + b_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$, tous > 0. Soit u le minimum (resp. v le maximum) des quantités b_{n-1}/b_n, b_{n-2}/b_{n-1},. . .,b_0/b_1.

3. Montrer que toute racine $z \in \mathbb{C}$ de B vérifie $u \leq |z| \leq v$.
4. Vérifier que toutes les racines dans $\mathbb{C}$ de $7X^4 + 6X^3 + 2X^2 + 3X + 1$ ont un module compris entre 1/4 et 3/2.

2.1.3 Comptage de racines réelles

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La *suite de Sturm de P* est la suite de polynômes obtenus dans l'algorithme d'Euclide pour la recherche du pgcd de P et de son polynôme dérivé P', à ceci près que l'on prend à chaque fois **l'opposé du reste de la division euclidienne**, au lieu de prendre le reste : $P_0 = P$, $P_1 = P'$, P_{k+1} = l'opposé du reste de la division euclidienne de P_{k-1} par P_k pour $k \geq 1$, P_N = le dernier polynôme non nul obtenu (un pgcd de P et P').

Si a n'est pas une racine de P, on pose $v_P(a)$ = le nombre de changements de signe dans la suite des valeurs $P_0(a), P_1(a), \ldots, P_N(a)$. On compte un changement de signe quand $P_k(a)P_{k+1}(a) < 0$, ou quand $P_k(a)P_{k+\ell}(a) < 0$ et que $P_{k+1}(a) = \ldots = P_{k+\ell-1}(a) = 0$.

Théorème 2.3 (Théorème de Sturm) *Soient $a < b$ deux nombres réels qui ne sont pas racines de P. Alors le nombre de racines réelles distinctes de P dans $]a, b[$ est égal à $v_P(a) - v_P(b)$.*

Exemple : la suite de Sturm de $P = X^2 - 1$ est $X^2 - 1$, $2X$, 1. On a $v_P(-2) = 2$, $v_P(0) = 1$, $v_P(2) = 0$. On sait bien qu'il y a une racine de P dans $]-2, 0[$ et une dans $]0, 2[$.

Le théorème de Sturm permet d'isoler les racines réelles de P dans des intervalles, par dichotomie. On peut ensuite obtenir des valeurs approchées des racines en utilisant l'algorithme de Newton.

Un autre résultat permet de majorer facilement le nombre de racines réelles.

Théorème 2.4 (Règle de Descartes) *Le nombre de racines de P (comptées avec multiplicité) dans $]0, +\infty[$ est inférieur ou égal au nombre de changements de signe dans la suite des coefficients de P, et la différence est paire.*

Par exemple, le nombre de racines du polynôme $X^9 + 3X^7 - 24X^6 + X^2 - 63$ dans $]0, +\infty[$ est égal à 1 ou 3.

Exercice 2.7

Calculez la suite de Sturm de $X^3 - 3X + 1$. Trouvez des bornes pour ses racines, et isolez les racines réelles dans des intervalles.

Exercice 2.8

Sans calcul, que pouvez-vous dire du nombre de racines réelles de $X^{2011} + 1407X^{1789} - 1210X^{1492} + 1$?